

## Раскраски гиперграфов

Данила Черкашин

Февраль 2017

1. В лагере а) 25 школьников; б) 27 школьников; в) 21 школьник. Каждый день дежурит 5 школьников. Могло ли так случиться, что за лагерь любые два школьника дежурили вместе ровно один раз?
2. Пусть  $r$  — фиксированное число,  $n$  — достаточно большое. Докажите неравенство

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\frac{1}{r}n^2 - i}{n^2 - i} \geq c \left(\frac{1}{r}\right)^n,$$

где  $c$  — некоторая константа.

3. Назовем *полноцветной* такую раскраску вершин гиперграфа в  $r$  цветов, что любое ребро гиперграфа содержит любой цвет. Докажите, что любой  $n$ -граф  $H = (V, E)$  с  $|E| \leq \frac{1}{r} \left(\frac{r}{r-1}\right)^n$  имеет полноцветную раскраску.
4. Можно заметить, что в предыдущей задаче при маленьком отношении  $n/r$  оценка теряет смысл. Докажите, что  $p(n, r) > n/r$ .
5. Предположим, что  $n/r = 10$ . Найдите какую-нибудь верхнюю оценку на  $p(n, r)$ .
6. Найдите верхнюю оценку на величину  $p(n, r)$ , аналогичную оценке на  $m(n, r)$  с первой пары, если  $r$  — фиксированное число, а  $n$  стремится к бесконечности.

## Раскраски гиперграфов

Данила Черкашин

Февраль 2017

1. В лагере а) 25 школьников; б) 27 школьников; в) 21 школьник. Каждый день дежурит 5 школьников. Могло ли так случиться, что за лагерь любые два школьника дежурили вместе ровно один раз?
2. Пусть  $r$  — фиксированное число,  $n$  — достаточно большое. Докажите неравенство

$$\prod_{i=0}^{n-1} \frac{\frac{1}{r}n^2 - i}{n^2 - i} \geq c \left(\frac{1}{r}\right)^n,$$

где  $c$  — некоторая константа.

3. Назовем *полноцветной* такую раскраску вершин гиперграфа в  $r$  цветов, что любое ребро гиперграфа содержит любой цвет. Докажите, что любой  $n$ -граф  $H = (V, E)$  с  $|E| \leq \frac{1}{r} \left(\frac{r}{r-1}\right)^n$  имеет полноцветную раскраску.
4. Можно заметить, что в предыдущей задаче при маленьком отношении  $n/r$  оценка теряет смысл. Докажите, что  $p(n, r) > n/r$ .
5. Предположим, что  $n/r = 10$ . Найдите какую-нибудь верхнюю оценку на  $p(n, r)$ .
6. Найдите верхнюю оценку на величину  $p(n, r)$ , аналогичную оценке на  $m(n, r)$  с первой пары, если  $r$  — фиксированное число, а  $n$  стремится к бесконечности.