Листок 1

Задача 1. Докажите точность оценки Турана в общем случае.

Задача 2. Придумайте как можно более мощную конструкцию независимого множества в графе $KG_{n,r}$, в которой общее пересечение всех вершин пусто (в конструкции с лекции оно состоит из одного элемента).

Задача 3. Попытайтесь улучшить оценку mn в олимпиадной задаче, разобранной на лекции.

Задача 4. Пусть G — граф, вершины которого те же, что у $KG_{n,r}$, но ребра возникают тогда и только тогда, когда вершины либо не пересекаются (как у Кнезера), либо пересекаются по одному элементу. Найдите как можно лучшие нижние оценки числа независимости такого графа при различных соотношениях между n и r.

Задача 5. Пусть $\mathcal{R}_n = \{1, \ldots, n\}$. Найдите как можно более точные нижние оценки чисел независимости следующих графов:

1. графа $G = (V, E)$, где
$$V = \{A \subset \mathcal{R}_{20} : \ |A| = 10\}, \quad E = \{\{A, B\} : \ A, B \in V, \ |A \cap B| \leqslant 4\}.$$
2. графа $G = (V, E)$, где
$$V = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_8) : \ x_i \in \{-1, 0, 1\}, \ x_1^2 + \ldots + x_8^2 = 4\},$$
$$E = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \ x_1 y_1 + \ldots + x_8 y_8 = 0\}.$$
3. графа $G = (V, E)$, где
$$V = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{16}) : \ x_i \in \{-1, 0, 1\}, \ x_1^2 + \ldots + x_{16}^2 = 8\},$$
$$E = \{\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\} : \ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \ x_1 y_1 + \ldots + x_{16} y_{16} = 0\}.$$

Задача 6. Пусть $G = (V, E)$, где
$$V = \{A \subset \mathcal{R}_{20} : \ |A| = 5\}, \quad E = \{\{A, B\} : \ A, B \in V, \ |A \cap B| \geqslant 2\}.$$
Докажите, что $\alpha(G) \leqslant 19$.