# Пересечения выпуклых тел. Листок 1. Выпуклость и применения теоремы Хелли.

*Первые 2 задачи стоят 0.5 балла, задачи 3-8 — один балл, задачи 9-11 стоят 2 балла. Для закрытия листка стоит набрать 6 баллов.*

1. На плоскости дано пять точек, причём никакие три из них не лежат на одной прямой. Докажите, что четыре из этих точек расположены в вершинах выпуклого четырёхугольника.

2. На плоскости дано n точек, причём любые четыре из них являются вершинами выпуклого четырёхугольника. Докажите, что эти точки являются вершинами выпуклого n-угольника.

3. Пусть $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ — точки на плоскости. Докажите эквивалентность двух определений выпуклой оболочки, а именно:

   а) любая выпуклая комбинация этих точек лежит в любом выпуклом множестве, содержащем эти точки;

   б) проверьте, что множество всех выпуклых комбинаций является выпуклым.

4. Пусть $A$ и $B$ — два непересекающихся выпуклых компактных тела на плоскости. Докажите лемму об отделимости: существует прямая такая, что эти тела находятся по разные стороны от неё.

   Примечание. Компактность нужна для следующего утверждения: минимальное расстояние между $A$ и $B$ достигается, т.е. существует $\bar{a} \in A$ и $\bar{b} \in B$ такие, что длина отрезка $\overline{ab}$ не больше длины любого другого отрезка с концами в $A$ и $B$.

5. На плоскости лежат несколько прямоугольников (не обязательно одинаковых), каждые два из которых пересекаются. Тогда все прямоугольники имеют общую точку.

6. Дан выпуклый многоугольник. Известно, что для любых трёх его сторон можно выбрать точку O внутри многоугольника так, что перпендикуляры, опущенные из точки O на эти три стороны, попадают на сами стороны, а не на их продолжения. Докажите, что тогда такую точку O можно выбрать для всех сторон одновременно.

7. Если несколько полуплоскостей покрывают всю плоскость, то из них всегда можно выбрать три, которые также покроют всю плоскость.

8. а) На плоскости дано конечное множество точек. Любые три из них можно накрыть кругом радиуса 1. Тогда и все множество можно накрыть кругом радиуса 1.

   б) На плоскости дано конечное множество точек. Пусть расстояние между любыми двумя из них не больше 1. Тогда все точки можно накрыть кругом радиуса $1/\sqrt{3}$.

9. Пусть $C$, а также $F_1, F_2, \ldots, F_n$ — выпуклые множества на плоскости. Известно, что для любых 3-х из $F_1, F_2, \ldots, F_n$ их пересечение содержит некоторый сдвиг $C$. Докажите, что тогда пересечение всех содержит некоторый сдвиг $C$.

10. На плоскости даны несколько параллельных отрезков. Известно, что для любых трёх отрезков найдётся прямая, их пересекающая. Тогда существует прямая, пересекающая все эти отрезки.

11. На плоскости дано множество точек $A$. Скажем, что точка $\bar{a} \in A$ видна из точки $\bar{b} \in A$, если отрезок $\overline{ab} \subset A$. Известно, что для любых трёх точек в $A$ найдётся точка, из которой видны все эти три точки. Докажите, что в $A$ найдётся точка, из которой видно всё $A$.