Комбинаторная геометрия: листок 2

1. На занятии мы покрасили пространство кубами в 27 цветов. А можно ли в той же раскраске использовать меньшее число цветов?

2. Будем красить пространство, запрещая точкам одного цвета отстоять друг от друга как на расстояние 1, так и на расстояние 2. Докажите какую-нибудь нижнюю и какую-нибудь верхнюю оценку для минимального числа цветов.

3. Докажите, что $\chi_m(\mathbb{R}^2) \leqslant 4$.

4. Оценивая снизу хроматическое число плоскости в манхэттенской метрике, мы просто использовали “тетраэдр”, а вернее, 4 точки, расстояние между любыми двумя из которых равно 1. Эти точки служили вершинами квадрата, который в координатах задается как множество точек (x_1, x_2), удовлетворяющих неравенству $|x_1| + |x_2| \leqslant 1/2$ (проверьте это!). Рассмотрите в трехмерном пространстве аналогичное тело, состоящее из точек (x_1, x_2, x_3), для которых $|x_1| + |x_2| + |x_3| \leqslant 1/2$. Что это за тело? Какую нижнюю оценку хроматического числа $\chi_m(\mathbb{R}^3)$ можно получить с его помощью?

5. Обычное расстояние между точками $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ на плоскости измеряется, как мы знаем, по формуле $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$. А манхэттенское расстояние измеряется по формуле $|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Рассмотрим естественное обобщение обоих расстояний. А именно, фиксируем число $q \geqslant 1$ и определим расстояние по формуле $\sqrt[q]{|x_1 - y_1|^q + |x_2 - y_2|^q}$. Таким образом, при $q = 2$ получаем обычное расстояние, а при $q = 1$ — Манхэттен. Докажите, что и при других q получается метрика. **Замечание.** Попробуйте хотя бы на уровне интуиции осознать, что если устремить q к бесконечности, то в пределе получится экстремальная метрика $\max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$!

6. Придумайте еще какую-нибудь метрику на плоскости, кроме описанных выше.

7. Докажите, что если $r(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — метрика, то $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{r(\mathbf{x},\mathbf{y})}{1+r(\mathbf{x},\mathbf{y})}$ — тоже метрика.