Комбинаторная геометрия: листок 4

Задача 1. Решите упражнение с вебинара (если $|AA'| = |BB'|$, то шестиугольник центрально-симметричный).

Задача 2. Приведите пример не центрально-симметричного шестиугольника со всеми углами по 120 градусов.

Задача 3. Решите упражнение с вебинара: квадрат со стороной 1 нельзя разбить на 3 части диаметра меньше 1.

Задача 4. Возьмем на плоскости круг B_1 радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Известно, что он является универсальной покрышкой для множеств диаметра 1 на плоскости. Поверим в это. Поставим произвольную точку на его границе и рассмотрим круг B_2 радиуса 1 с центром в этой точке. Докажите, что $B_1 \cap B_2$ — также универсальная покрышка для множеств диаметра 1 на плоскости.

Задача 5. С помощью результата задачи 4 передокажите теорему о том, что каждый торт диаметра 1 на плоскости можно разрезать на три части меньшего диаметра.

Назовем *универсальной покрывающей системой (упс)* в $\mathbb{R}^2$ любую совокупность множеств $\{S_\alpha\}$, обладающих тем свойством, что для всякого $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\operatorname{diam}\Omega = 1$, существует движение, переводящее Ω внутрь хотя бы одного из множеств S_α.

Задача 6. Рассмотрим правильный шестиугольник Ω_6 с расстоянием 1 между параллельными сторонами. Возьем отрезок, соединяющий центр шестиугольника с одной из его вершин, и проведем прямую, перепендикулярную этому отрезку, на расстоянии $1/2$ от центра. Прямая отсечет от шестиугольника треугольник. Докажите, что шестиугольник без указанного треугольника (обозначим его Ω_6') также служит универсальной покрышкой на плоскости.

Задача 7. Пусть вершины шестиугольника Ω_6 суть A, B, C, D, E, F. Пусть фигура Ω_6' получена из Ω_6 удалением треугольника с вершиной A. Рассмотрим фигуру Ω_6^1, полученную из Ω_6' удалением таких же точно треугольников с вершинами C и E. Рассмотрим также фигуру Ω_6^2, полученную из Ω_6' удалением треугольников с вершинами B и C. Докажите, что фигуры Ω_6^1, Ω_6^2 образуют упс.

Задача 8. Докажите, что любое множество диаметра 1 на плоскости можно разбить на 5 частей, в каждой из которых нет пары точек, отстоящих друг от друга на расстояние $\frac{1}{\sqrt{3}}$. **Указание.** Используйте Ω_6.

Задача 9. Укажите такое n, что любое множество на плоскости можно разбить на n частей, в каждой из которых нет пары точек, отстоящих друг от друга на расстояние 1. Какое наименьшее n Вы можете указать?

Задача 10. Докажите, что всякое множество диаметра 1 на плоскости разбивается на 6 частей, диаметры которых не превосходят величины $\sqrt{\frac{13}{3}}(2 - \sqrt{3}) = 0.5577...$ **Указание.** Используйте упс $\{\Omega_6^1, \Omega_6^2\}$.