1 Математическая индукция

Базовая версия. Метод математической индукции. Базис индукции, шаг индукции (индукционный переход).

Примерные задачи:

1. Докажите, что квадрат $2^n \times 2^n$, в котором вырезана произвольная клетка, можно разрезать на уголки из трёх клеток.
2. Докажите, что $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \ldots + (n-1) \cdot n = \dfrac{(n-1) \cdot n \cdot (n+1)}{3}$.
3. Докажите, что если $a > -1$ и n натурально, то $(1+a)^n \geqslant 1 + an$.
4. На какое максимальное число частей могут разбить плоскость n прямых?
5. Докажите, что если число $a + \dfrac{1}{a}$ целое, то и $a^n + \dfrac{1}{a^n}$ тоже целое.

Расширенная версия. Принцип наименьшего элемента.

Литература:

1. Головина Л.И., Яглом И.М., «Индукция в геометрии» (Том 21 из серии «Популярные лекции по математике») — Москва, Физматгиз, 1961 (5-10).
   http://math.ru/lib/ser/plm
2. Курант Р., Робинс Г., «Что такое математика?» — Москва, МЦНМО, 2000 (34-45).
   http://ilib.mccme.ru/
3. Соминский И.С., «Метод математической индукции» (Том 3 из серии «Популярные лекции по математике») — Москва, Наука, 1965 (5-41).
   http://math.ru/lib/ser/plm
4. Шень А., «Математическая индукция» — Москва, МЦНМО, 2004 (3-34).
   http://www.mccme.ru/free-books/

2 Комбинаторика

Базовая версия. Правило суммы и правило произведения. Числа размещений и сочетаний (с повторениями и без повторений), перестановки; явные формулы для них. Треугольник Паскаля. Бином Ньютона. Комбинаторные свойства чисел сочетаний: $C_n^k = C_n^{n-k}$, $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$, $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$, $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$.

Примерные задачи:

1. Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. В скольких случаях среди этих карт есть хотя бы один туз? Ровно один туз? Не менее двух тузов? Ровно два туза?
2. Сколькими способами можно расставить белые фигуры (короля, ферзя, две ладьи, двух слонов и двух коней) на первой линии шахматной доски?
3. Сколько четырёхзначных чисел можно составить из цифр числа 121 257?

Расширенная версия. Принцип включения-исключения. Свойства треугольника Паскаля.

Примерные задачи:

1. Найдите сумму всех трёхзначных чисел, не делящихся ни на 2, ни на 3, ни на 5.
2. В каких строках треугольника Паскаля все числа нечётные?

Литература:

1. Виленкин Н.Я., «Комбинаторика» — Москва, Наука, 1969 (9-54).
http://ilib.mccme.ru/
2. Виленкин Н.Я., «Популярная комбинаторика» — Москва, Наука, 1975 (73-103).
http://ilib.mccme.ru/
3. Горбачёв Н.В., «Сборник олимпиадных задач по математике» — Москва, МЦНМО, 2004 (184-204).
4. Мешойрер Р., «Комбинаторные доказательства формулы Ньютона» — Квант, 1978, №9 (45-46).
http://kvant.mccme.ru/1978/09/kombinatornye_dokazatelstva_fo.htm
5. Успенский В.А., «Треугольник Паскаля» (Том 43 из серии «Популярные лекции по математике») — Москва, Наука, 1979 (5-43).
http://math.ru/lib/ser/plm

3 Теория вероятностей

Базовая версия. Событие, элементарный исход, благоприятный исход; определение вероятности события. Несовместные события, противоположные события, невозможные и достоверные события. Сумма и произведение событий.

Примерные задачи:

1. Какова вероятность того, что при сдаче 36 карт (по 9 каждой масти) четырём игрокам (каждый получает по 9 карт, все возможные расположения карт в колоде равновероятны) каждый игрок получит все карты какой-то одной масти?

2. Бросают четыре игральные кости (красную, жёлтую, зелёную и синюю). Пусть A — событие «на красной кости выпала шестёрка», а B — событие «на синей кости выпало чётное число очков». Найдите вероятность событий A, B, $A+B$ и AB.

Расширенная версия. Условная вероятность. Формула Байеса. Формула полной вероятности. Независимые события. Математическое ожидание.

Примерные задачи:

1. Какова вероятность того, что случайно взятое число от 1 до 100 делится на 2, при условии, что оно делится на 3?

2. Во сколько раз доля блондинов среди голубоглазых в тьмутараканском царстве больше доли голубоглазых среди блондинов, если всего голубоглазых там вдвое больше, чем блондинов?

3. В лотерее на 1% билетов выпадает выигрыш в 200 рублей, на $0,01\%$ билетов выпадает выигрыш в 1000 рублей, а остальные билеты без выигрыша. Найдите средний выигрыш в этой лотерее (в расчёте на один билет), то есть среднее арифметическое выигрышей всех билетов.

Литература:

1. Гнеденко Б.В., Хинчин А.Я., «Элементарное введение в теорию вероятностей» — Москва, Наука, 1970 (7-48).
http://ilib.mccme.ru/

2. Горбачёв Н.В., «Сборник олимпиадных задач по математике» — Москва, МЦНМО, 2004 (205-210).

3. Мостеллер Ф., Рурке Р., Томас Дж., «Вероятность» — Москва, Мир, 1969 (90-150).

4. Шень А., «Вероятность: примеры и задачи» — Москва, МЦНМО, 2008 (3-35).
http://www.mccme.ru/free-books/

4 Теория графов

Базовая версия. Понятие графа: вершины, рёбра, кратные рёбра, петли; общие графы и простые графы. Степень (валентность) вершины, лемма о рукопожатиях. Пути (цепи), простые пути (элементарные цепи), связные графы, компоненты связности, изолированные вершины. Циклы, деревья, висячие (концевые) вершины, остовы. Эйлеровы графы.

Примерные задачи:

1. Можно ли на плоскости нарисовать 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с 3 другими?

2. Квадрат 8×8 разделили на 64 клеточки спичками длины 1. Какое наименьшее число спичек нужно убрать, чтобы с любой клеточки можно было попасть на любую другую, не перепрыгивая через спички?

3. Докажите, что среди 6 человек есть либо 3 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых.

Расширенная версия. Полные графы. Двудольные графы. Понятие ориентированного графа (орграфа). Гамильтоновы графы. Плоские (планарные) графы, грани. Формула Эйлера для плоских графов.

Примерные задачи:

1. Нарисуйте плоский граф, имеющий 8 вершин, степень каждой из которых равна 4.

2. В некоторой стране каждый город соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдётся город, из которого можно добраться в любой другой.

3. В квадрате отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

Литература:

1. Горбачёв Н.В., «Сборник олимпиадных задач по математике» — Москва, МЦНМО, 2004 (56-78).

2. Оре О., «Графы и их применение» — Москва, Мир, 1965 (11-52, 127-135).
   http://ru.wikipedia.org/wiki/Теория_графов

3. Уилсон Р., «Введение в теорию графов» — Москва, Мир, 1977 (7-30, 36-50, 57-62).
   http://ru.wikipedia.org/wiki/Теория_графов